ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

$\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels.

Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$.

On désigne par $\mathcal{C}^k [a, b]$ l'ensemble des applications de l'intervalle fermé $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ admettant sur $[a, b]$ des dérivés continues jusqu'à l'ordre k au moins ($k \geqslant 1$).

On désigne par $\mathcal{C}^0 [a, b]$ l'ensemble des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $x_0 = a < x_1 < x_2 \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ une subdivision de $[a, b]$.

On désigne par $P^k [a, b]$ (resp. $P^k [x_j, x_{j+1}]$) l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients réels sur $[a, b]$ (resp. $[x_j, x_{j+1}]$) de degré inférieur ou égal à k.

Si X est une matrice à coefficients réels, sa transposée est notée X^t.

I

1° Pour $j = 0, 1, \ldots, n-1$, on définit φ_j l'application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \dfrac{(x - x_j)^3}{6} & \text{si } x \geqslant x_j \\ 0 & \text{si } x < x_j \end{cases}$$

Démontrer que $\varphi_j \in \mathcal{C}^2 [a, b]$.

Étudier la dérivée troisième de φ_j.

2° Soit S l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications s de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$s(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \delta_j \varphi_j(x) + p_2(x)$$

où $\delta_j \in \mathbb{R}$ et $p_2 \in P^2 [a, b]$.

α. Quelle est la dimension de S ?

β. Que représentent les δ_j pour l'application s ?

γ. Démontrer que pour tout $f \in \mathcal{C}^2 [a, b]$ et pour tout $s \in S$, on a :

$$\int_a^b s''(x) f''(x)\, dx = \sum_{j=0}^{n-1} \delta_j f(x_j) - \left(\sum_{j=0}^{n-1} \delta_j \right) f(b) + s''(b) f'(b) - s''(a) f'(a)$$

δ. Démontrer que S est l'espace vectoriel des applications de $\mathcal{C}^2 [a, b]$ dont la restriction à chaque intervalle $[x_j, x_{j+1}]$ appartient à $P^3 [x_j, x_{j+1}]$.

II

1° Soit H l'application linéaire de S dans $\mathbb{R}^{n+3}$ définie pour $s \in S$ par :

$$H(s) = (s(x_0), s(x_1) \ldots, s(x_n), s'(x_0), s'(x_n))$$

α. Soit $f \in \mathcal{C}^0 [a, b]$, démontrer que :

$$\int_a^b (f(x))^2\,dx = 0 \qquad \text{implique} \qquad f = 0$$

β. Démontrer que H est injective.

2° Soit $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$, démontrer qu'il existe un unique élément de S noté s_f tel que :

$$\begin{cases} s_f(x_j) = f(x_j) & j = 0, 1, \ldots, n \\ s_f'(x_0) = f'(x_0) \\ s_f'(x_n) = f'(x_n) \end{cases}$$

s_f s'appelle la spline d'interpolation de f.

3° α. Démontrer que pour tout $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$, pour tout $s \in S$, on a :

$$\int_a^b (f''(x) - s_f''(x))\, s''(x)\,dx = 0$$

β. On pose pour $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$, $N(f) = \left(\int_a^b (f''(x))^2\,dx \right)^{1/2}$.

Démontrer que :

- $(N(f - s_f))^2 = (N(f))^2 - (N(s_f))^2$
- $N(f - s_f) = \min_{s \in S} N(f - s)$

Exprimer tous les $s \in S$ tels que :

$$N(f - s_f) = N(f - s)$$

III

Soit $h > 0$ tel que $hn = b - a$.

On suppose dorénavant que $x_j = x_0 + jh$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

1° Soit pour $j = 0, 1, \ldots, n-1$, l'application s_j de $[x_j, x_{j+1}]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$s_j(x) = M_j \frac{(x_{j+1} - x)^3}{6h} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^3}{6h} + A_j(x - x_j) + B_j$$

où M_j, M_{j+1}, A_j, B_j sont donnés dans $\mathbb{R}$.

Exprimer une condition nécessaire et suffisante sur les M_k, A_k, B_k pour qu'il existe une application s de $\mathcal{C}^2[a, b]$ dont la restriction à chaque intervalle $[x_j, x_{j+1}]$ soit l'application s_j.

Calculer M_k en fonction de $s''(x_j)$.

Montrer que l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ constitué des applications s ainsi obtenues est S.

2° Soit $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$ et s_f la spline d'interpolation de f, démontrer que $(M_0, M_1, \ldots, M_n)$ associés à s_f sont solutions du système linéaire (L) :

$$\begin{cases} 4M_0 + 2M_1 = d_0 \\ M_{j-1} + 4M_j + M_{j+1} = d_j & j = 1, 2, \ldots, n-1 \\ 2M_{n-1} + 4M_n = d_n \end{cases}$$

avec

$$d_0 = \frac{12}{h} \left[\frac{f(x_1) - (f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right]$$

$$d_j = \frac{6}{h^2}\left[f(x_{j-1}) - 2f(x_j) + f(x_{j+1})\right] \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$d_n = \frac{12}{h}\left[f'(x_n) - \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{h}\right]$$

3° Soient A la matrice carrée d'ordre $n+1$ de ce système, z et w des matrices colonnes à $(n+1)$ lignes et à coefficients réels telles que :

$$w = \mathrm{A}\,z$$

Montrer que :

$$\max_{j=0,\ldots,n} |w_j| \geqslant 2 \max_{j=0,\ldots,n} |z_j|$$

En déduire que le système linéaire (L) a une solution et une seule.

4° Soient M, d, F les matrices colonnes à $(n+1)$ lignes définies par :

$$\mathrm{M} = (\mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_n)^t,$$

$$d = (d_0, d_1, \ldots, d_n)^t,$$

$$\mathrm{F} = (f''(x_0), f''(x_1) \ldots, f''(x_n))^t,$$

posons $r = d - \mathrm{AF}$, $r = (r_0, r_1, \ldots, r_n)^t$.

Soit $f \in \mathcal{C}^4[a, b]$ et $\mathrm{L} = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$.

α. Démontrer en utilisant une formule de Taylor que :

$$\max_{j=0,\ldots,n} |r_j| \leqslant \frac{3}{2}\mathrm{L}h^2.$$

Démontrer que :

$$\max_{j=0,\ldots,n} |\mathrm{M}_j - f''(x_j)| \leqslant \frac{3}{4}\mathrm{L}h^2.$$

β. Posons $g = f - s_f$.

Déduire des résultats précédents que :

$$\text{pour tout } x \in [a, b] \text{ et } x \neq x_j \qquad (j = 0, \ldots, n)$$
$$|g^{(3)}(x)| \leqslant 2\mathrm{L}h,$$

puis que pour tout $x \in [a, b]$:

$$|g^{(2)}(x)| \leqslant \frac{7}{4}\mathrm{L}h^2,$$

$$|g'(x)| \leqslant \frac{7}{4}\mathrm{L}h^3,$$

$$|g(x)| \leqslant \frac{7}{8}\mathrm{L}h^4.$$